# Introducción a la Estadística y Probabilidad

## Tema 4. Números Índices

MANUEL MONGE, Ph.D.

Departamento de Economía Aplicada y Métodos Cuantitativos
Facultad de Derecho, Economía y Gobierno
Universidad Francisco de Vitoria

## Contenido

# 1. Contenidos

# 1. Contenidos

- Introducción
- Definición y clasificación de números índices.
- Índices simples.
- Índices compuestos sin ponderar. Precios y cantidades.
- Índices compuestos ponderados. Precios y cantidades.
- Índice de valor.
- Deflactación de series económicas.

# 2. Definición de números índices

# 2. Definición de números índices

Números índices

- Un índice, o número índice, mide el cambio que se produce en un artículo en particular (producto o servicio) entre dos períodos.
- En otras palabras, es un número que expresa el cambio relativo de precio, cantidad o valor comparado con un período base.

# 2. Definición de números índices

¿Por qué utilizar los números índices?

Las razones para calcular un índice son:

- Facilita la comparación de series diferentes.
- Si los números son muy grandes, a menudo es más fácil comprender el cambio del índice que el cambio en los números.

# 3. Clasificación de números índices

# 3. Clasificación de números índices

Índices

1. Simples
   - Referencia fija.
   - Referencia dato anterior.
2. Compuestos
   - Índices no ponderados
     - Promedio simple de los precios relativos
     - Índice agregado simple
   - Índices ponderados
     - Índice de precios de Laspeyres
     - Índice de precios de Paasche
     - Índice ideal de Fisher

# 3.1. Índices simples

# 3.1. Índices simples

Si el número índice se utiliza para medir el cambio relativo de una sola variable, (ej. los salarios por hora en la manufactura) es un índice simple porque es la razón de dos variables, y dicha razón se convierte en un porcentaje.

Su uso principal en la economía o los negocios es mostrar el cambio porcentual de uno o más aspectos de un período a otro.

- **Referencia fija**

$$I_0^t = \frac{X_t}{X_0} 100$$

donde,
- $I_0^t$ representa el índice de la magnitud en el periodo 't' sobre el periodo base 0.
- $X_t$ refleja el valor de la magnitud en el periodo t.
- $X_0$ refleja el valor de la magnitud en el periodo 0.

- **Referencia de dato anterior**

$$I_{t-1}^t = \frac{X_t}{X_{t-1}} 100$$

donde,
- $X_{t-1}$ refleja el valor de la magnitud en el periodo $t-1$.

# 3.1. Índices simples

**Aclaración:**

- La notación $X_t$ utilizada en la diapositiva anterior se refiere a cualquier magnitud.
- Lo más habitual es referirse al precio, principalmente, cantidad y valor de un artículo o concepto.
- Por esta razón, a partir de la siguiente diapositiva se utilizará como nomenclatura el precio 'Pt'.

# Ejemplo 1 - Índices Simples

De acuerdo con el U.S. Bureau of Labor Statistics de Estados Unidos, en el año 2000 el salario promedio de los trabajadores en Estados Unidos era de \$14,02 ; en marzo de 2016 fue de \$21,37. ¿Cuál es el índice de salarios por hora de los obreros en marzo de 2016 con base en los datos del año 2000?

$$P_t = \frac{\textit{Salario por hora promedio en } 2016}{\textit{Salario por hora promedio en } 2000} \cdot (100) = \frac{\$21{,}37}{\$14{,}02} \cdot (100) = 152,43$$

Por tanto, el salario por hora de 2016 comparado con el de 2000 fue de 152,43 %; esto significa que el salario aumentó en un 52,43 % por hora durante el periodo, determinado por

$$152,43 - 100 = 52,43$$

# Ejemplo 2 - Índices Simples

La población de la provincia canadiense de Columbia Británica en 2014 fue de 4.657.947, y en Ontario, 13.730.187. ¿Cuál es el índice de población de Columbia Británica comparado con el de Ontario?

$$P_t = \frac{\textit{Población de Columbia Británica}}{\textit{Población de Ontario}} \cdot (100) = \frac{4{,}657{,}947}{13{,}730{,}187} \cdot (100) = 33,9$$

Esto indica que la población de Columbia Británica suma 33,9 % (cerca de un tercio) de la población de Ontario, o que la población de Columbia es un 65,8 % menor que la población de Ontario (100-33,9 = 66,1).

# 3.2. Índices compuestos sin ponderar

## 3.2. Índices compuestos sin ponderar

- En muchas ocasiones se desea combinar varios artículos y elaborar un índice para comparar el coste de este agregado de artículos en dos periodos distintos.
- Por ejemplo, podría necesitarse un índice que englobe los artículos que se relacionan con el gasto de operación y mantenimiento de un automóvil, cuyo artículos abarquen los precios de los neumáticos, aceite y gasolina.
- O bien, podría necesitarse un índice para estudiantes universitarios; este índice puede abarcar el coste de los libros, matrícula, alojamiento, alimentación y entretenimiento.
- Por tanto, hay varias formas de combinar los artículos para determinar un índice.

# 3.2. Índices compuestos sin ponderar

Promedio simple de los precios relativos

Vamos a ilustrar este concepto con un ejemplo.
En la siguiente table se reportan los precios de varios artículos de alimentación de 2003 y 2015. Usted desea elaborar con ellos el índice de 2015 usando 2003 como base; esto se expresa con el código abreviado 2003=100.

| Artículo | Precio en 2003 | Precio en 2015 | Índice simple |
|---|---|---|---|
| Pan blanco (libra) | $1.042 | $1.440 | 138.2 |
| Huevos (docena) | 1.175 | 2.133 | 181.5 |
| Leche blanca (galón) | 2.686 | 3.463 | 128.9 |
| Manzanas, Red Delicious (libra) | 0.911 | 1.265 | 138.9 |
| Jugo de naranja concentrado (12 onzas) | 1.848 | 2.678 | 144.9 |
| Café, 100% grano tostado (libra) | 2.999 | 4.827 | 161.0 |
| Total | $10.661 | $15.806 | |

¿Qué pasos debo seguir?

Calcule un **promedio simple** de los índices de precios de cada artículo empleando 2003 como base. El índice simple del pan es 138,2, que se determina con la siguiente fórmula:

$$P_i = \frac{P_t}{P_0} \cdot (100) = \frac{1440}{1042} \cdot (100) = 138,2$$

El índice simple de los demás artículos de la tabla se calcula de manera similar; el mayor aumento de precio fue 81,5 % para el huevo, seguido del café, con un 61 %.

# 3.2. Índices compuestos sin ponderar

También se puede determinar el porcentaje de cambio en el grupo de alimentos promediando los índices simples, cuya fórmula es:

**Promedio Simple de los precios relativos**

$$P = \frac{\sum P_i}{n}$$

donde,

- $P_i$ representa el índice simple de cada artículo.
- $n$ representa el número de artículos.

Siguiendo con el ejemplo (y tabla anterior) podemos determinar que el índice es:

$$P = \frac{138{,}2 + \ldots + 161{,}0}{6} = \frac{893{,}4}{6} = 148,9$$

Esto indica que la media del grupo de índices aumentó 48,9 % de 2003 a 2015.

# 3.2. Índices compuestos sin ponderar

Características del promedio simple:

- Una característica **positiva** es que se obtiene el mismo valor del índice sin importar las unidades de medida (ej. toneladas, libras, etc.).
- Una característica **negativa** es que no considera la importancia relativa de los artículos que se consideran (ej. la leche y los huevos reciben la misma ponderación, aunque una familia común gaste mucho más durante el año en leche que en huevos).

# 3.2. Índices compuestos sin ponderar

Índice agregado simple

Una segunda probabilidad es sumar los precios (en lugar de los índices) de los dos periodos y luego determinar el índice con base en los totales. La fórmula es:

$$P = \frac{\sum P_t}{\sum P_0} \cdot 100$$

El índice de los artículos de alimentos que antes he presentado en una tabla se determina dividiendo la suma de los precios de 2015 entre la suma de los precios de 2003.
La suma de los precios del periodo base es 10.661 dólares, y la del periodo dado, 15.806 dólares.

$$P = \frac{\$15{,}806}{\$10{,}661} \cdot (100) = 148,3$$

Por tanto, concluimos que el **índice agregado simple** es de 148,3; esto significa que el grupo de precios agregado aumentó 48,3 % en el periodo de 13 años.

# 3.2. Índices compuestos sin ponderar

Algunas consideraciones a tener en cuenta con el **índice agregado simple**:

- Como las unidades de medición pueden influir en el valor de un índice agregado simple, este no se emplea con frecuencia.
- En el ejemplo, el valor del índice diferiría de manera significativa si el precio de las manzanas se reportara en toneladas en lugar de libras o kilos.
- También observe el efecto del café en el índice total. Tanto para el año actual como para el año base, el café es un contribuyente importante al índice total, por lo que un cambio de su precio incidirá en el índice mucho más que cualquier otro artículo.
- En consecuencia, es necesario encontrar una forma de **ponderar** de manera aproximada los artículos de acuerdo con su importancia relativa.

# 3.3. Índices compuestos ponderados

# 3.3. Índices compuestos ponderados

Índice de precios ponderados

- Dos métodos para calcularlos son el de **Laspeyres** y el de **Paasche**.
- Difieren solo en el periodo de ponderación.
- Cuando se emplea el **método de Laspeyres** se aplican ponderaciones en el *periodo base*, es decir, los precios y las cantidades originales de los artículos comprados se utilizan para encontrar el cambio porcentual durante un periodo, ya sea en el precio o en la cantidad consumida, según el problema.
- En el **método de Paasche** se aplican *ponderaciones en el año en curso*.

# 3.3. Índices compuestos ponderados

Índice de precios de Laspeyres

- A finales del siglo XVIII, Etienne Laspeyres desarrolló un método para determinar un índice de precios ponderado con las cantidades del periodo base como ponderaciones.
- Según dicho método, un índice de precios ponderado se calcula mediante:

$$P = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot (100)$$

donde,

- $P$ es el índice de precios;
- $p_t$ es el precio actual;
- $p_0$ es el precio en el periodo base;
- $q_0$ es la cantidad en el periodo base;

Ejemplo - Laspeyres

A continuación, se muestra la misma tabla que en el ejemplo anterior con seis artículos de alimentación. En este caso, se incluyen el número típico de unidades consumidas por una familia promedio en 2003 y 2015.

| Artículo | Precio en 2003 | Precio en 2015 | Índice simple |
|---|---|---|---|
| Pan blanco (libra) | $1.042 | $1.440 | 138.2 |
| Huevos (docena) | 1.175 | 2.133 | 181.5 |
| Leche blanca (galón) | 2.686 | 3.463 | 128.9 |
| Manzanas, Red Delicious (libra) | 0.911 | 1.265 | 138.9 |
| Jugo de naranja concentrado (12 onzas) | 1.848 | 2.678 | 144.9 |
| Café, 100% grano tostado (libra) | 2.999 | 4.827 | 161.0 |
| Total | $10.661 | $15.806 | |

Determine un índice de precios ponderado con el método de Laspeyres e interprete el resultado.

# 3.3. Índices compuestos ponderados

**Solución - Laspeyres**

- Primero determine la cantidad total que se gastó en los seis artículos en el periodo base (2003).
- Para encontrar este valor multiplique el precio, en el periodo base, del pan (1.042 dólares) por la cantidad en el periodo base (50), el resultado es 52,10 dólares. Esta cifra indica que se gastó un total de 52,10 dólares en el periodo base en pan.
- Continúe de la misma manera con todos los artículos y sume los resultados.
- El total del periodo base es de 493,86 dólares.
- El total del periodo actual se calcula de manera similar.
- En el caso del primer artículo (pan), multiplique la cantidad en 2003 por el precio del pan en 2015, es decir $\$1440 \cdot 50 = \$72$.
- Haga el mismo cálculo con cada artículo y sume el resultado. El total es 683,68 dólares.

**Índice Laspeyres**

| | 2003 | | Precio 03 | 2015 | | Precio 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Artículo** | **Precio** | **Cantidad** | **Cantidad 03** | **Precio** | **Cantidad** | **Cantidad 03** |
| Pan blanco (libra) | $1.042 | 50 | $ 52.10 | $1.440 | 55 | $ 72.00 |
| Huevos (docena) | 1.175 | 26 | 30.55 | $2.133 | 20 | $ 55.46 |
| Leche blanca (galón) | 2.686 | 102 | 273.97 | $3.463 | 130 | $353.23 |
| Manzanas, Red Delicious (libra) | 0.911 | 30 | 27.33 | $1.265 | 40 | $ 37.95 |
| Jugo de naranja concentrado (12 onzas) | 1.848 | 40 | 73.92 | $2.678 | 41 | $107.12 |
| Café, 100% grano tostado (libra) | 2.999 | 12 | 35.99 | $4.827 | 12 | $ 57.92 |
| | | | $493.86 | Índice | 138.44 | $683.68 |

# 3.3. Índices compuestos ponderados

Solución - Laspeyres

El índice de precios ponderados de 2015 es de 138,44, determinado por:

$$P = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot (100) = \frac{\$683,68}{\$493,86} \cdot (100) = 138,44$$

- Con base a estos cálculos se puede concluir que el precio de este grupo de artículos aumentó 38,44 % en el periodo de dice años.
- La ventaja de este método sobre el índice agregado simple es que se considera la ponderación de cada artículo.
- En el índice agregado simple, el café representaba alrededor de 40 % de la ponderación para determinar el índice.
- En el índice de Laspeyres, el artículo con la mayor ponderación es la leche, debido a que el precio del producto y las unidades que se vendieron son mayores.

# 3.3. Índices compuestos ponderados

Índice de precios de Paasche

- La desventaja principal del índice de Laspeyres es que se supone que las cantidades en el periodo base aún son reales en el periodo dado; es decir, las cantidades de los seis artículos son casi las mismas en 2003 que en 2015.
- En este caso, la cantidad de huevos comprados disminuyó un 23 %, mientras que la cantidad de leche aumentó casi un 28 % y el número de manzanas subió un 33 %.
- El índice de Paasche es una alternativa.
- Su procedimiento es similar, pero en lugar de emplear cantidades del periodo base como ponderaciones, se utilizan cantidades del periodo actual.
- Se emplea la suma de los productos de los precios en 2003 y las cantidades en 2015.
- Esto tiene la ventaja de emplear las cantidades más recientes.
- Si hubiera un cambio en las cantidades consumidas desde el periodo base, se reflejaría en el índice Paasche.

$$P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t} \cdot (100)$$

**Ejemplo - Paasche**

Utilizando los mismos datos del ejemplo anterior, que son:

| | 2003 | | 2015 | |
|---|---|---|---|---|
| **Artículo** | **Precio** | **Cantidad** | **Precio** | **Cantidad** |
| Pan blanco (libra) | $1.042 | 50 | $1.440 | 55 |
| Huevos (docena) | 1.175 | 26 | 2.133 | 20 |
| Leche blanca (galón) | 2.686 | 102 | 3.463 | 130 |
| Manzanas, Red Delicious (libra) | 0.911 | 30 | 1.265 | 40 |
| Jugo de naranja concentrado (12 onzas) | 1.848 | 40 | 2.678 | 41 |
| Café, 100% grano tostado (libra) | 2.999 | 12 | 4.827 | 12 |

Queremos determinar el índice Paasche y analizar cuál de los índices se debe utilizar.

Solución - Paasche

En la siguiente tabla se muestran los cálculos para determinar el índice de Paasche. En la siguiente tabla muestro los resultados:

**Índice Paasche**

| | 2003 | | Precio 03 | 2015 | | Precio 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Artículo** | **Precio** | **Cantidad** | **Cantidad 13** | **Precio** | **Cantidad** | **Cantidad 13** |
| Pan blanco (libra) | $1.04 | 50 | $ 57.31 | $1.44 | 55 | $ 79.20 |
| Huevos (docena) | 1.18 | 26 | 23.50 | 2.13 | 20 | 42.66 |
| Leche blanca (galón) | 2.69 | 102 | 349.18 | 3.46 | 130 | 450.19 |
| Manzanas, Red Delicious (libra) | 0.91 | 30 | 36.44 | 1.27 | 40 | 50.60 |
| Jugo de naranja concentrado (12 onzas) | 1.85 | 40 | 75.77 | 2.68 | 41 | 109.80 |
| Café, 100% grano tostado (libra) | 3.00 | 12 | 35.99 | 4.83 | 12 | 57.92 |
| | | | $578.19 | Índice | 136.7 | $790.37 |

El índice Paasche es 136,7 que he determinado con la siguiente fórmula:

$$P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t} \cdot (100) = \frac{\$790{,}37}{\$578{,}19} \cdot (100) = 136,70$$

Este resultado indica que el precio de esta 'canasta básica' de artículos entre 2003 y 2015 aumentó un 36,7 %; es decir, costó un 36,7 % más comprar estos artículos en 2015 que en 2003.

# 3.3. Índices compuestos ponderados

**¿Cómo decidir cuál emplear? ¿Cuándo es más adecuado el índice de Laspeyres y cuándo lo es el de Paasche?**

Laspeyres

- Ventajas: Requiere datos sobre cantidades solo del periodo base, lo que le permite una comparación más significativa en el transcurso del tiempo. Los cambios en el índice se pueden atribuir a cambios de precio.
- Desventajas: No refleja cambios que el tiempo genera en los patrones de compra; además, puede ponderar demasiado los artículos cuyos precios aumentan.

Paasche

- Ventajas: Como utiliza cantidades del precio actual, refleja los hábitos actuales de compra.
- Desventajas: Requiere datos de cantidades del año actual; como se utilizan cantidades diferentes cada año, es imposible atribuir cambios en el índice a cambios en el precio. Tiende a ponderar demasiado los artículos cuyos precios disminuyeron. Necesita que los precios se vuelvan a calcular cada año.

# 3.3. Índices compuestos ponderados

Índice ideal de Fisher

- Como se observó antes, el índice de Laspeyres tiende a dar demasiado peso a los artículos cuyos precios aumentaron;
- Por otro lado, el de Paasche hace lo mismo con los artículos cuyos precios disminuyeron.
- En un intento de compensar estas desventajas, Irving Fisher, en su libro *The Making of Index Numbers* , publicado en 1922, propone un **índice ideal de Fisher**, compuesto por la media geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche.
- La media geométrica, se obtiene con la raíz k-ésima del producto de $k$ números positivos.
- En teoría, el índice de Fisher parece ideal porque combina las mejores características de los índices de Laspeyres y Paasche, es decir, equilibra los efectos de ambos índices; sin embargo, casi no se utiliza en la práctica debido a que tiene el mismo conjunto básico de problemas que el índice de Paasche, y precisa determinar un conjunto nuevo de cantidades en cada periodo.

$$\text{Índice ideal de Fisher} = \sqrt{(\acute{I}ndice\ de\ Laspeyres)\cdot(\acute{I}ndice\ de\ Paasche)}$$

# 3.3. Índices compuestos ponderados

Ejemplo - Fisher

Según los datos utilizados en el ejemplo anterior, determine el índice de Fisher.

$$\acute{I}ndice\ ideal\ de\ Fisher = \sqrt{(\acute{I}ndice\ de\ Laspeyres) \cdot (\acute{I}ndice\ de\ Paasche)} = \sqrt{(138,44) \cdot (136,7)} = 137,57$$

# 3.3. Índices compuestos ponderados

Ejercicio

Elabore el índice de precios de ropa de 2016 con base en 2000; considere zapatos y vestidos. Los precios y las cantidades de los dos años se dan en la siguiente tabla; utilice el año 2000 como periodo base y 100 como valor base.

| | 2000 | | 2017 | |
|---|---|---|---|---|
| **Artículo** | **Precio** | **Cantidad** | **Precio** | **Cantidad** |
| Vestido (pieza) | $75 | 500 | $85 | 520 |
| Zapatos (par) | 40 | 1 200 | 45 | 1 300 |

Se pide:

1. Determine el promedio simple de los índices de precios.
2. Determine el índice de precios agregados de los dos años.
3. Determine el índice de precios de Laspeyres.
4. Determine el índice de precios de Paasche.
5. Determine el índice de precios ideal de Fisher.

# 4. Deflactación de series económicas

# 4. Deflactación de series económicas

- Cuando se comparan magnitudes económicas en valor a lo largo del tiempo se presenta el problema de que, debido a las alteraciones de los precios (inflación o deflación), a las unidades monetarias de diferentes periodos les corresponde un poder adquisitivo distinto.
- Para que dichos valores sean homogéneos desde el punto de vista real, es necesario **eliminar la influencia de los precios**, a este proceso se le conoce como **deflactación de valores**.
- Por tanto, la deflactación consiste en **transformar** el valor de una magnitud en **unidades monetarias corrientes o nominales**, en el valor de esa misma magnitud en **unidades monetarias constantes o reales**.

$$Magnitud\ real = \frac{Magnitud\ nominal}{Indice\ de\ precios} \cdot 100$$